

成考高起专、本 -数学（理）

黄金考点汇编

第一部分 代数

第一章 数、式、方程和方程组(预备知识)

考点 1: 实数

1. 实数的分类

- (1) 有理数
- (2) 无理数

2. 实数的相关概念

- (1) 数轴
- (2) 绝对值

绝对值的意义: 数轴上的点到原点的距离.

正数的绝对值是它本身, 负数的绝对值是它的相反数, 0 的绝对值是 0. 实数 a 的绝对值可表示为 $|a|$, 即

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

若 a, b 为实数, 则

① $|a| \geq 0$, 当且仅当 $a = 0$ 时取等号.

② $|a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 且 $b = 0$.

③ $|a| = |-a|$.

- (3) 相反数
- (4) 倒数

3. 实数的运算

运算法则

数的运算顺序: 先乘方、开方, 然后乘、除, 最后加、减, 有括号先算括号(即从内往外的顺序).

考点 2: 整式的运算

1. 整式的加减运算

2. 整式的乘法运算

- (1) 单项式乘单项式 (2) 多项式乘单项式 (3) 多项式乘多项式 (4) 常用乘法公式

平方差公式: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

完全平方公式: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

立方和、差公式: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

完全立方公式: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

3. 多项式的因式分解

4. 分式的运算

分式的加、减运算: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.

分式的乘法运算: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

分式的除法运算: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

分式的乘方运算: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

注意: 分式的运算结果一定要化为最简分式(或整式).

考点 3 方程

1. 一元一次方程: 形如 $ax+b=0(a \neq 0)$ 的方程

2. 一元二次方程

一元二次方程的解法

直接开平方法, 形如 $(x+m)^2 = a(a \geq 0)$ 的方程

因式分解法, 可化为 $m(x+a)(x+b)=0$ 的方程

公式法, 求根公式为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} (b^2 - 4ac \geq 0)$

配方法, 若 $ax^2 + bx + c = 0$ 不易分解因式, 考虑配方为 $a(x+t)^2 = h$ 的形式, 再开方求解

总结

常用方法: 首选因式分解法, 若不适用则选择公式法. (公式法适用于一切有实数根的一元二次方程)

根的判别式: $\Delta = b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 的根的判别式. 它与根的关系如下:

①当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根.

②当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根.

③当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根.

④根与系数的关系: 若 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 的两个根, 则有 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (韦达定理).

如果 $x_1 + x_2 = p, x_1 x_2 = q$, 则 $x^2 - px + q = 0$ 是以 x_1 和 x_2 为根的一元二次方程.

考点 4 方程组

1. 方程组形如 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ 的方程组称为二元一次方程组.

其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ 均为实数.

(1) “元”指未知数的个数; “次”指未知数的最高次数.

(2) 一次方程组的解法: 一般采用代入消元法或加减消元法求解.

第二章 集合与简易逻辑

考点 1. 元素与集合

一组对象的全体构成一个集合.

(1) 集合中元素的三大特征: 确定性、互异性、无序性.

(2) 集合中元素与集合的关系: 对于元素 a 与集合 A , $a \in A$ 或 $a \notin A$, 二者必居其一.

(3) 常见集合的符号表示及其关系图.

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	N	N*	Z	Q	R



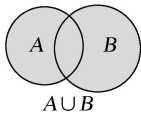
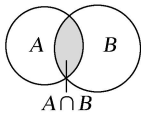
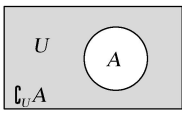
- (4) 集合的表示法：列举法、描述法、Venn 图法.
- (5) 集合的分类：集合按元素个数的多少分为有限集、无限集，有限集常用列举法表示，无限集常用描述法表示.

考点 2.集合间的基本关系

关系	定义	表示
相等	集合 A 与集合 B 中的所有元素都相同	$A = B$
子集	A 中的任意一个元素都是 B 中的元素	$A \subseteq B$
真子集	A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A	$A \subsetneq B$

- 注意：(1) 空集用 $\varnothing$ 表示.
- (2) 若集合 A 中含有 n 个元素，则其子集个数为 2^n ，真子集个数为 $2^n - 1$ ，非空真子集的个数为 $2^n - 2$.
- (3) 空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.
- (4) 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$.

考点 3.集合的基本运算

	集合的并集	集合的交集	集合的补集
符号表示	$A \cup B$	$A \cap B$	若全集为 U，则集合 A 的补集为 $C_U A$
图形表示			
集合表示	$\{x x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$	$\{x x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$	$\{x x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$
运算性质	$A \cup A = A, A \cup \varnothing = A, A \cup B = B \cup A.$	$A \cap A = A, A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap B = B \cap A.$	$A \cap (C_U A) = \varnothing, A \cup (C_U A) = U, C_U (C_U A) = A$

- 特别提醒：
1. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow C_U A \supseteq C_U B.$
2. $C_U (A \cap B) = (C_U A) \cup (C_U B), C_U (A \cup B) = (C_U A) \cap (C_U B).$

考点 4.简易逻辑

- 1.命题
- 用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题，其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题.
2. 充分条件与必要条件

若 $p \Rightarrow q$ ，则 p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必要条件	
p 是 q 的充分不必要条件	$p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$
p 是 q 的必要不充分条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$
p 是 q 的充要条件	$p \Leftrightarrow q$
p 是 q 的既不充分又不必要条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$

3. 重要结论
- 1.若 $A = \{x|p(x)\}, B = \{x|q(x)\}$ ，则
- (1) 若 $A \subseteq B$ ，则 p 是 q 的充分条件；

- (2) 若 $A \supseteq B$, 则 p 是 q 的必要条件;
- (3) 若 $A = B$, 则 p 是 q 的充要条件;
- (4) 若 $A \subsetneq B$, 则 p 是 q 的充分不必要条件;
- (5) 若 $B \subsetneq A$, 则 p 是 q 的必要不充分条件;
- (6) 若 $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq A$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

2.充分条件与必要条件的两个特征:

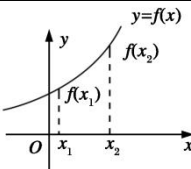
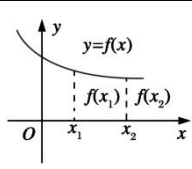
- (1) 对称性: 若 p 是 q 的充分条件, 则 q 是 p 的必要条件, 即 “ $p \Rightarrow q$ ” $\Leftrightarrow$ “ $q \Leftarrow p$ ”.
- (2) 传递性: 若 p 是 q 的充分 (必要) 条件, q 是 r 的充分 (必要) 条件, 则 p 是 r 的充分 (必要) 条件, 即 “ $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow r$ ” $\Rightarrow$ “ $p \Rightarrow r$ ” (“ $p \Leftarrow q$ 且 $q \Leftarrow r$ ” $\Rightarrow$ “ $p \Leftarrow r$ ”).

注意: 不能将 “若 p , 则 q ” 与 “ $p \Rightarrow q$ ” 混为一谈, 只有 “若 p , 则 q ” 为真命题时, 才有 “ $p \Rightarrow q$ ”, 即 “ $p \Rightarrow q$ ” $\Leftrightarrow$ “若 p , 则 q ” 为真命题.

第三章 函数

考点 1.函数的单调性

1.单调函数的定义

	增函数	减函数
定义	一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就 说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数	当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就说函 数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数
图象描述	 自左向右看图象是 <u>上升</u> 的	 自左向右看图象是 <u>下降</u> 的

2.单调区间的定义

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数, 那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有 (严格的) 单调性, 区间 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的单调区间.

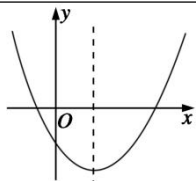
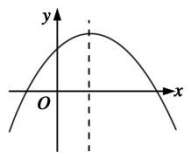
考点 2. 函数的奇偶性

	偶函数	奇函数
定义	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x 都有 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 是偶函数	都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 是奇函数
图象特征	关于 <u>y 轴</u> 对称	关于 <u>原点</u> 对称

考点 3.二次函数

- (1) 解析式:
一般式: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
- 顶点式: $f(x) = a(x - h)^2 + k$ ($a \neq 0$).
- 两根式: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0$).

(2) 图象和性质

解析式	$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a > 0)$	$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a < 0)$
图象		
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值域	$[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty)$	$(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}]$
单调性	在 $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$ 上是减函数, 在 $x \in [-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 上是增函数	在 $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$ 上是增函数, 在 $x \in [-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 上是减函数
最值	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$
奇偶性	当 $b = 0$ 时为偶函数	
顶点	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$	
对称性	图象关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 成轴对称图形	

考点 4. 指数与指数运算

1.根式

(1) 根式的概念

根式的概念	符号表示	备注
如果 $x^n = a$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根	$\sqrt[n]{a}$	$n > 1$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$
当 n 为奇数时, 正数的 n 次方根是一个 <u>正数</u> , 负数的 n 次方根是一个 <u>负数</u>		零的 n 次方根是零
当 n 为偶数时, 正数的 n 次方根有 <u>两个</u> , 它们互为 <u>相反数</u>		负数没有偶次方根

(2) 两个重要公式

① $\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a^{\frac{1}{n}}, & n \text{ 为奇数,} \\ |a|^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} a^{\frac{1}{n}} & (a \geq 0), \\ -a^{\frac{1}{n}} & (a < 0), \end{cases} & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

② $(\sqrt[n]{a})^n = a$ (注意 a 必须使 $\sqrt[n]{a}$ 有意义) .

2.分数指数幂

(1) 正数的正分数指数幂是 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, n > 1)$.

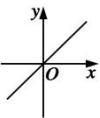
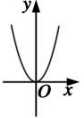
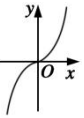
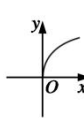
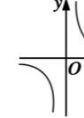
(2) 正数的负分数指数幂是 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ ($a>0, m, n \in \mathbf{N}^*, n>1$) .

(3) 0 的正分数指数幂是 0, 0 的负分数指数幂无意义.

3.实数指数幂的运算性质

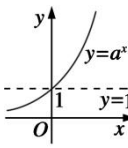
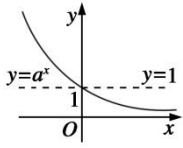
- (1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ ($a>0, r, s \in \mathbf{R}$) ;
- (2) $(a^r)^s = a^{rs}$ ($a>0, r, s \in \mathbf{R}$) ;
- (3) $(ab)^r = a^r b^r$ ($a>0, b>0, r \in \mathbf{R}$) .

考点 5. 幂函数

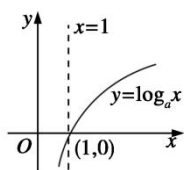
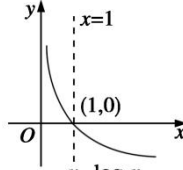
函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图象					
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x x \geq 0\}$	$\{x x \neq 0\}$
值域	$\mathbf{R}$	$\{y y \geq 0\}$	$\mathbf{R}$	$\{y y \geq 0\}$	$\{y y \neq 0\}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	在 $\mathbf{R}$ 上单调递增	在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增	在 $\mathbf{R}$ 上单调递增	在 $[0, +\infty)$ 上单调递增	在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减

考点 6.指数函数图象与性质

指数函数的概念、图象和性质

定义	函数 $f(x) = a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$) 叫指数函数	
底数	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $(0, +\infty)$	

考点 7.对数函数的图象和性质

图象	$a>1$	$0<a<1$
		
性质	定义域: $(0, +\infty)$	
	值域: $(-\infty, +\infty)$	
	当 $x=1$ 时, $y=0$, 即过定点 $(1, 0)$	
	当 $0<x<1$ 时, $y<0$; 当 $x>1$ 时, $y>0$	当 $0<x<1$ 时, $y>0$; 当 $x>1$ 时, $y<0$

在 $(0, +\infty)$ 上为增函数在 $(0, +\infty)$ 上为减函数

第四章 不等式与不等式组.

考点 1. 不等式的性质

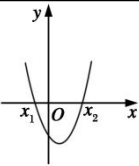
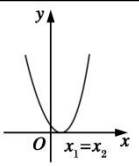
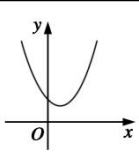
- (1) 对称性: $a > b \Leftrightarrow b < a$;
- (2) 传递性: $a > b, b > c \Rightarrow \underline{a > c}$;
- (3) 同向可加性: $a > b \Leftrightarrow a + c > \underline{b + c}$; $a > b, c > d \Rightarrow a + c > \underline{b + d}$;
- (4) 同向同正可乘性: $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$; $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$; $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$;
- (5) 可乘方性: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > \underline{b^n}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$);
- (6) 可开方性: $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

考点 2. 一元一次不等式组的解法:

- (1) 分别求出不等式组中各个不等式的解集;
- (2) 利用数轴求出这些不等式的解集的公共部分, 即这个不等式组的解集。

考点 3. 一元二次不等式的解法

- (1) 将不等式的右边化为零, 左边化为二次项系数大于零的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$).
- (2) 计算相应的判别式.
- (3) 当 $\Delta \geq 0$ 时, 求出相应的一元二次方程的根.
- (4) 利用二次函数的图象与 x 轴的交点确定一元二次不等式的解集.

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) 的根	有 <u>两相异</u> 实根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)	有 <u>两相等</u> 实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	<u>没有</u> 实数根
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集	$\{x \underline{x > x_2} \text{ 或 } x < \underline{x_1}\}$	$\{x x \in \mathbb{R} \text{ 且 } \underline{x \neq x_1}\}$	<u>$\mathbb{R}$</u>
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的解集	$\{x \underline{x_1} < x < \underline{x_2}\}$	<u>$\emptyset$</u>	<u>$\emptyset$</u>

考点 4. 简单分式不等式的解法

- (1) $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (< 0) $\Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$ (< 0);
- (2) $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ (≤ 0) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 (\leq 0) \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

考点 5. 绝对值不等式的解法

- (1) 含绝对值的不等式 $|x| < a$ 与 $|x| > a$ 的解集

不等式	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$ x < a$	$(-a, a)$	$\emptyset$	$\emptyset$
$ x > a$	$(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$\mathbf{R}$

(2) $|ax + b| \leq c$ ($c > 0$) 和 $|ax + b| \geq c$ ($c > 0$) 型不等式的解法

① $|ax + b| \leq c \Leftrightarrow -c \leq ax + b \leq c$;

② $|ax + b| \geq c \Leftrightarrow ax + b \geq c$ 或 $ax + b \leq -c$.

第五章 数列

考点 1. a_n 与 S_n 的关系

若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$

考点 2. 等差数列的有关概念

(1) 等差数列的定义

如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差等于同一个常数, 那么这个数列就叫做等差数列, 这个常数叫做等差数列的公差, 通常用字母 d 表示, 定义的表达式为 $a_{n+1} - a_n = d$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(2) 等差中项

如果 a, A, b 成等差数列, 那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项且 $A = \frac{a+b}{2}$.

(3) 通项公式

如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d , 那么通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$ ($n, m \in \mathbf{N}^*$).

(4) 前 n 项和公式: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

考点 3. 等差数列的性质

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和.

(1) 若 $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, 则 $am_1 + am_2 + \dots + am_k = an_1 + an_2 + \dots + an_k$. 特别地, 若 $m + n = p + q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$.

(2) $a_m, a_{m+k}, a_{m+2k}, a_{m+3k}, \dots$ 仍是等差数列, 公差为 kd .

(3) 数列 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 也是等差数列.

(4) $\left\{ \begin{matrix} S_n \\ n \end{matrix} \right\}$ 为等差数列.

(5) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是公差分别为 d_1, d_2 的等差数列, 则数列 $\{pa_n\}, \{a_n + p\}, \{pa_n + qb_n\}$ 都是等差数列 (p, q 都是常数), 且公差分别为 $pd_1, d_1, pd_1 + qd_2$.

考点 4. 等比数列的概念

(1) 等比数列的定义

如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的比等于同一常数 (不为零), 那么这个数列叫做等比数列, 这个常数叫做等比数列的公比, 通常用字母 q 表示.

符号语言: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($n \in \mathbf{N}^*, q$ 为非零常数).

(2) 等比中项: 如果 a, G, b 成等比数列, 那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项. 即: G 是 a 与 b 的等比中项 $\Leftrightarrow a, G, b$ 成等比数列 $\Rightarrow G^2 = ab$.

注意: 任意两数的等差中项都唯一存在; 但只有两个数满足 $ab > 0$ 时, a, b 才有等比中项, 且有互为相反数的两个.

考点 5. 等比数列的有关公式

(1) 通项公式: $a_n = a_1 q^{n-1} = a_m q^{n-m}$.

(2) 前 n 项和公式: $S_n = \begin{cases} na_1 & q = 1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$

第六章 复数

考点 1. 复数的运算

(1) 运算法则: 设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$z_1 \pm z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad (c + di \neq 0).$$

第七章 导数概念与几何意义

考点 1. 导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是在曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 相应地, 切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

考点 2. 基本初等函数的导数公式表

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = c$	$y' = 0$
$y = x^n \quad (n \in \mathbb{N}_+)$	$y' = nx^{n-1}, n$ 为正整数
$y = x^\mu \quad (x > 0, \mu \neq 0 \text{ 且 } \mu \in \mathbb{Q})$	$y' = \mu x^{\mu-1}, \mu$ 为有理数
$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$y' = a^x \ln a$
$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

考点 3. 导数的四则运算法则

设 $u = u(x), v = v(x)$ 都可导, 则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2) (Cu)' = Cu' (C \text{ 为常数})$$

$$(3) (uv)' = u'v + uv'$$

$$(4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

考点 4. 函数的单调性

在某个区间 (a, b) 内, 如果 $f'(x) \geq 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在这个区间内单调递增; 如果 $f'(x) \leq 0$, 那么函数 $y =$

$f(x)$ 在这个区间内单调递减.

考点 5. 函数的极值

(1) 一般地, 求函数 $y=f(x)$ 的极值的方法

解方程 $f'(x)=0$, 当 $f'(x_0)=0$ 时:

①如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$, 右侧 $f'(x)<0$, 那么 $f(x_0)$ 是极大值;

②如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$, 右侧 $f'(x)>0$, 那么 $f(x_0)$ 是极小值.

(2) 求可导函数极值的步骤

①求 $f'(x)$;

②求方程 $f'(x)=0$ 的根;

③考察 $f'(x)$ 在方程 $f'(x)=0$ 的根附近的左右两侧导数值的符号. 如果左正右负, 那么 $f(x)$ 在这个根处取得极大值; 如果左负右正, 那么 $f(x)$ 在这个根处取得极小值.

考点 6. 函数的最值

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值与最小值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 则 $f(a)$ 为函数的最小值, $f(b)$ 为函数的最大值; 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 则 $f(a)$ 为函数的最大值, $f(b)$ 为函数的最小值.

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值的步骤如下:

①求函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内的极值;

②将函数 $y=f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a)$, $f(b)$ 比较, 其中最大的一个为最大值, 最小的一个为最小值.

第二部分 三角

第八章 三角函数及其有关概念

考点 1. 弧度数

一般地, 正角的弧度数是一个正数, 负角的弧度数是一个负数, 零角的弧度数是 0.

如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l , 那么角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| = \frac{l}{r}$.

考点 2. 弧度与角度的换算

$$(1) \textcircled{1} 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{rad}; \textcircled{2} 1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

(2) 常用特殊角的弧度数

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

考点 3. 弧度制下的弧长公式与扇形面积公式

(1) 弧长公式

在半径为 r 的圆中, $l=|\alpha|r$, 其中 α 的单位是弧度.

(2) 扇形面积公式

$$S = \frac{1}{2} |\alpha| r^2.$$

考点 4.任意角的三角函数和特殊角的三角函数值

设 α 是任意大小的角, 点 $P(x, y)$ 为角 α 的终边上的任意一点 (不与原点重合), 点 P 到原点的距离为 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 那么角 α 的正弦、余弦、正切分别定义为

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}; \cos \alpha = \frac{x}{r}; \tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在	0

第九章 三角函数式的变换**考点 1. 同角三角函数的基本关系式**

(1) 平方关系: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

(2) 商数关系:

考点 2. 三角函数的诱导公式

组数	一	二	三	四	五	六
角	$2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$\pi + \alpha$	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$
正弦	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
余弦	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
正切	$\tan \alpha$	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	/	

诱导公式的记忆口诀

“奇变偶不变, 符号看象限”. “奇”与“偶”指的是诱导公式 $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 中的整数 k 是奇数还是偶数. “变”与“不变”是指函数的名称的变化, 若 k 是奇数, 则正、余弦互变; 若 k 为偶数, 则函数名称不变. “符号看象限”指的是在 $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 中, 将 α 看成锐角时 $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 所在的象限.

考点 3. 两角和与差的正余弦公式

两角和与差的余弦公式: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$.

两角和与差的正弦公式: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

两角和与差的正切公式: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

考点 4. 二倍角的正弦、余弦及正切公式

- (1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ ($S_{2\alpha}$) .
- (2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ ($C_{2\alpha}$) .
- (3) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ ($T_{2\alpha}$) .

考点 5.二倍角公式的变形

- (1) .降幂公式: $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.
- (2) .升幂公式: $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

考点 6.辅助角 (“二合一”) 公式:

$$a\sin \alpha + b\cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin (\alpha + \phi), \text{ 其中 } \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

第十章 三角函数的图象与性质

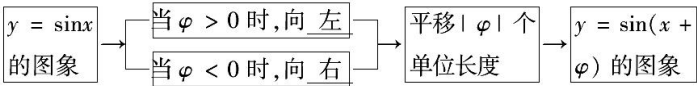
考点 1.正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质

函数 性质	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域	$\{x x \in \mathbb{R}\}$	$\{x x \in \mathbb{R}\}$	$\{x x \in \mathbb{R}, \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
值域	$\{y -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y -1 \leq y \leq 1\}$	$\mathbb{R}$
单调性	在 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ 上递增; 在 $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ 上递减	在 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ 上递增; 在 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ 上递减	在 $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ 上递增

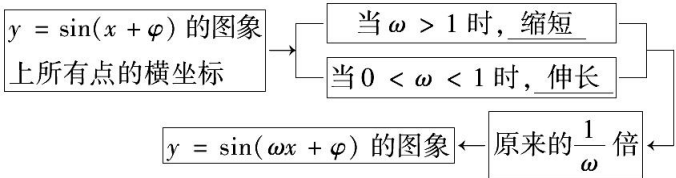
最值	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ 时, $y_{\max} = 1$; $x =$ $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ 时, $y_{\min} = -1$	$x = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ 时, $y_{\max} = 1$; $x =$ $\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ 时, $y_{\min} = -1$	无最值
奇偶性	奇	偶	奇
最小正周期	2π	2π	π

考点 2. 参数 A, ω, φ 对函数 y=Asin(ωx+φ) 图象的影响 (图像的平移)

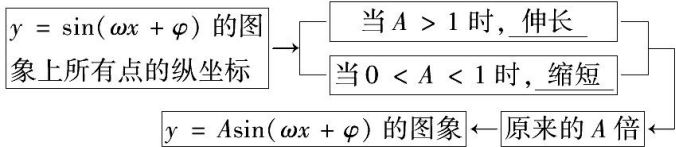
(1) φ 对 y=sin(x+φ), x∈R 的图象的影响.



(2) ω (ω>0) 对 y=sin(ωx+φ) 的图象的影响.



(3) A (A>0) 对 y=Asin(ωx+φ) 的图象的影响.



第十一章 解三角形

考点 1. 正弦定理和余弦定理

定理	正弦定理	余弦定理
内容	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (其中 R 是△ABC 外接圆的半径)	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos C$
常见变形	① $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ ② $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ ③ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ ④ $a\sin B = b\sin A$, $b\sin C = c\sin B$, $a\sin C = c\sin A$	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
解决斜三角形的问题	(1) 已知两角和任一边, 求另一角和其他两条边 (2) 已知两边和其中一边的对角, 求另一边和其他两角	(1) 已知三边, 求各角 (2) 已知两边和它们的夹角, 求第三边和其他两个角

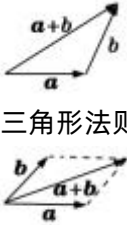
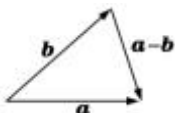
第三部分 平面解析几何

第十二章 平面向量

考点 1. 向量的有关概念

- (1) 向量：既有大小又有方向的量叫做向量，向量的大小叫做向量的长度（或称模）。
- (2) 零向量：长度为 0 的向量叫做零向量，其方向是任意的，零向量记作 0。
- (3) 单位向量：长度等于 1 个单位的向量。
- (4) 平行向量：方向相同或相反的非零向量；平行向量又叫共线向量。规定：0 与任一向量平行。
- (5) 相等向量：长度相等且方向相同的向量。
- (6) 相反向量：长度相等且方向相反的向量。

考点 2. 向量的线性运算

向量运算	定义	法则（或几何意义）	运算律
加法	求两个向量和的运算	 三角形法则 平行四边形法则	(1) 交换律： $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ； (2) 结合律： $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
减法	向量 $\mathbf{a}$ 加上向量 $\mathbf{b}$ 的相反向量叫做 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的差，即 $\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$	 三角形法则	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$
数乘	实数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\mathbf{a}$	(1) 模： $ \lambda\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} $ ； (2) 方向： 当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 的方向相同； 当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 的方向相反； 当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$	设 λ, μ 是实数. (1) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ (2) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (3) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

考点 3. 共线向量定理

向量 $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) 与 $\mathbf{b}$ 共线，当且仅当存在唯一一个实数 λ ，使 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ 。

考点 4. 平面向量的基本定理及坐标表示

(1) 平面向量的基本定理

如果 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是同一平面内的两个 不共线 向量，那么对这一平面内的任一向量 $\mathbf{a}$ ，有且只有一对实数 λ_1, λ_2 使 $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2$ 。

(2) 平面向量的坐标表示

在直角坐标系内, 分别取与 x 轴, y 轴正方向相同 的两个单位向量 i, j 作为基底, 对任一向量 a , 有唯一一对实数 x, y , 使得: $a = xi + yj$, (x, y) 叫做向量 a 的直角坐标, 记作 $a = (x, y)$, 显然 $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$, $0 = (0, 0)$.

(3) 平面向量的坐标运算

1) 向量加法、减法、数乘向量及向量的模

设 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, 则 $a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $a - b = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, $\lambda a = (\lambda x_1, \lambda y_1)$, $|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

2) 向量坐标的求法

①若向量的起点是坐标原点, 则终点坐标即为向量的坐标.

②设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

(4) 向量共线的坐标表示

若 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, 则 $a \parallel b \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

考点 5. 中点坐标公式

若 P_1, P_2 的坐标分别是 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 线段 $P_1 P_2$ 的中点 P 的坐标为 (x, y) , 则

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \end{cases} \quad \text{此公式}$$

为线段 $P_1 P_2$ 的中点坐标公式.

第十三章 直线

考点 1. 两点间的距离与线段中点的坐标

一般地, 设 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 为平面内任意两点,

(1) P_1, P_2 之间的距离 $|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(2) 线段 $P_1 P_2$ 中点 $P_0(x_0, y_0)$ 的坐标为 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

考点 2. 直线的倾斜角和斜率

(1) **倾斜角定义**: 当直线 l 与 x 轴相交时, 我们取 x 轴作为基准, 把 x 轴 正向 与直线 l 向上 方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角. 当直线 l 与 x 轴平行或重合时, 规定它的倾斜角为 0° . 倾斜角的取值范围为 $[0^\circ, 180^\circ)$.

(2) **斜率的定义**: 一条直线的倾斜角 α 的 正切值 叫做这条直线的斜率, 斜率常用小写字母 k 表示, 即 $k = \tan \alpha$, 倾斜角是 90° 的直线斜率不存在.

(3) 过两点的直线的斜率公式

经过两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ (其中 $x_1 \neq x_2$) 的直线的斜率公式为 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

考点 3. 直线方程的三种形式

名称	方程	适用范围
点斜式	$y - y_0 = k(x - x_0)$	不含直线 $x = x_0$
斜截式	$y = kx + b$	不含垂直于 x 轴的直线

一般式	$Ax + By + C = 0$ 其中要求 $A^2 + B^2 \neq 0$	适用于平面直角坐标系内的所有直线
-----	--	------------------

考点 4. 两条直线的位置关系

平面内两条直线的位置关系包括 平行、相交、重合 三种情况.

(1) 两条直线平行

对于直线 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$, $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$, 且 $b_1 \neq b_2$.

对于直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$,

$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, 且 $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$ (或 $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$).

(2) 两条直线垂直

对于直线 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

对于直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

(3) 两条直线的交点

直线 l_1 和 l_2 的交点坐标即为两直线方程组成的方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 的解.

相交 $\Leftrightarrow$ 方程组有 唯一解;

平行 $\Leftrightarrow$ 方程组 无解;

重合 $\Leftrightarrow$ 方程组有 无数个解.

(4) 三种距离公式

(1) 平面上的两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 间的距离公式 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

特别地, 原点 $O(0,0)$ 与任一点 $P(x, y)$ 的距离 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

(3) 两条平行线 $Ax + By + C_1 = 0$ 与 $Ax + By + C_2 = 0$ 间的距离为 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

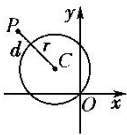
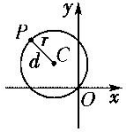
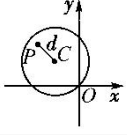
第十四章 圆锥曲线**考点 1. 圆的定义及方程**

定义	平面内到 <u>定点</u> 的距离等于 <u>定长</u> 的点的集合(轨迹)叫做圆	
标准方程	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 (r > 0)$	圆心 C : <u>(a, b)</u>
		半径: <u>r</u>
一般方程	$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$	圆心: $\left[-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2} \right]$
		半径: $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

考点 2. 点与圆的位置关系

圆 $C: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 (r > 0)$, 其圆心为 (a, b) , 半径为 r , 点 $P(x_0, y_0)$, 设 $d = |PC| = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$.

位置关系	d 与 r 的大小	图示	点 P 的坐标的特点
------	---------------	----	--------------

点在圆外	$d > r$		$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2$
点在圆上	$d = r$		$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$
点在圆内	$d < r$		$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2$

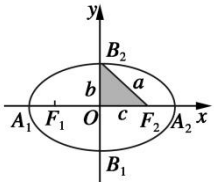
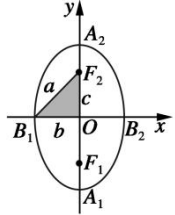
考点 3. 椭圆的定义

平面内与两个定点 F_1 、 F_2 的 距离的和等于常数（大于 $|F_1F_2|$ ） 的点的轨迹叫做椭圆，这两个定点叫做椭圆的 焦点，两焦点间的距离叫做椭圆的 焦距。

注：若集合 $P = \{M \mid |MF_1| + |MF_2| = 2a\}$ ， $|F_1F_2| = 2c$ ，其中 $a > 0$ ， $c > 0$ ，且 a 、 c 为常数，则有如下结论：

- (1) 若 $a > c$ ，则集合 P 为 椭圆；
- (2) 若 $a = c$ ，则集合 P 为 线段 F_1F_2 ；
- (3) 若 $a < c$ ，则集合 P 为 空集。

考点 4. 椭圆的标准方程和几何性质

标准方程		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$
图形			
性质	范围	$-a \leq x \leq a$ $-b \leq y \leq b$	$-b \leq x \leq b$ $-a \leq y \leq a$
	对称性	对称轴：坐标轴 对称中心：原点	
	顶点	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$	$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$ $B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$
	轴	长轴 A_1A_2 的长为 <u>$2a$</u> ； 短轴 B_1B_2 的长为 <u>$2b$</u>	
	焦距	$ F_1F_2 = \underline{2c}$	
	离心率	$e = \frac{c}{a} \in (0, 1)$	
a、b、c 的关系		<u>$c^2 = a^2 - b^2$</u>	

考点 5. 直线与椭圆的位置关系

直线 $y = kx + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$ 的位置关系判断方法：由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$ 消去 y （或 x ）得到一个

一元二次方程.

位置关系	解的个数	Δ 的取值
相交	两解	$\Delta \geq 0$
相切	一解	$\Delta = 0$
相离	无解	$\Delta < 0$

直线与椭圆相交弦长: 设直线斜率为 k , 直线与椭圆两交点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} |y_1 - y_2|$, 一般地, $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$ 用根与系数关系求解.

考点 6. 双曲线的定义

平面内与两个定点 F_1 、 F_2 的 距离的差的绝对值 等于常数 (小于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫做双曲线. 这两个定点叫做双曲线的 焦点, 两焦点间的距离叫做双曲线的 焦距.

注: 设集合 $P = \{M \mid |MF_1| - |MF_2| = 2a\}$, $|F_1F_2| = 2c$, 其中 a, c 为常数, 且 $a > 0, c > 0$;

- (1 当 $a < c$ 时, P 点的轨迹是 双曲线;
- (2 当 $a = c$ 时, P 点的轨迹是 两条射线;
- (3 当 $a > c$ 时, 集合 P 是 空集.

考点 7. 双曲线的标准方程和几何性质

标准方程		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, \ b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, \ b > 0)$
图形			
	范围	$x \geq a$ 或 $x \leq -a, \ y \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}, \ y \leq -a$ 或 $y \geq a$
	对称性	对称轴: 坐标轴 对称中心: 原点	
	顶点	顶点坐标: A_1 <u>$(-a, 0)$</u> , A_2 <u>$(a, 0)$</u>	顶点坐标: A_1 <u>$(0, -a)$</u> , A_2 <u>$(0, a)$</u>
	渐近线	$y = \underline{\underline{\pm \frac{b}{a}x}}$	$y = \underline{\underline{\pm \frac{a}{b}x}}$
	离心率	$e = \frac{c}{a}, \ e \in (1, +\infty)$, 其中 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
	实虚轴	线段 A_1A_2 叫做双曲线的 <u>实轴</u> , 它的长 $ A_1A_2 = \underline{\underline{2a}}$; 线段 B_1B_2 叫做双曲线的 <u>虚轴</u> , 它的长 $ B_1B_2 = \underline{\underline{2b}}$; <u>a</u> 叫做双曲线的 <u>实半轴长</u> , <u>b</u> 叫做双曲线的 <u>虚半轴长</u>	
	a 、 b 、 c 的关系	$c^2 = a^2 + b^2 \ (c > a > 0, \ c > b > 0)$	

考点 8. 等轴双曲线

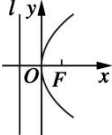
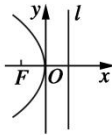
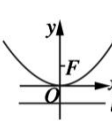
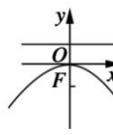
实轴和虚轴等长的双曲线, 标准方程为 $x^2 - y^2 = \pm a^2$

考点 9. 抛物线的定义

抛物线需要满足以下三个条件：

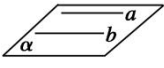
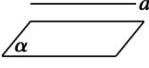
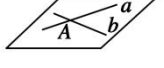
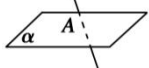
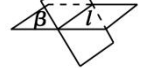
- (1) 在平面内；
- (2) 动点到定点 F 的距离与到定直线 l 的距离相等；
- (3) 定点 F 与定直线 l 的关系为点 F 不在 l 上。

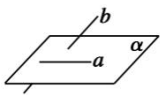
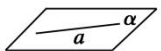
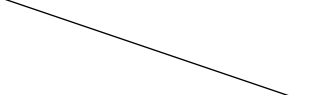
考点 10. 抛物线的标准方程与几何性质

标准方程	$y^2 = 2px$ ($p > 0$)	$y^2 = -2px$ ($p > 0$)	$x^2 = 2py$ ($p > 0$)	$x^2 = -2py$ ($p > 0$)
	p 的几何意义：焦点 F 到准线 l 的距离			
图形				
顶点	O (0,0)			
对称轴	y = 0		x = 0	
焦点	$F(\frac{p}{2}, 0)$	$F(-\frac{p}{2}, 0)$	$F(0, \frac{p}{2})$	$F(0, -\frac{p}{2})$
离心率	$e = 1$			
准线方程	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
范围	$x \geq 0, y \in \mathbb{R}$	$x \leq 0, y \in \mathbb{R}$	$y \geq 0, x \in \mathbb{R}$	$y \leq 0, x \in \mathbb{R}$
开口方向	向右	向左	向上	向下
焦半径 (其中 P (x ₀ , y ₀))	$ PF = x_0 + \frac{p}{2}$	$ PF = -x_0 + \frac{p}{2}$	$ PF = y_0 + \frac{p}{2}$	$ PF = -y_0 + \frac{p}{2}$

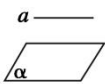
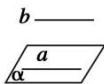
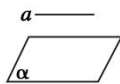
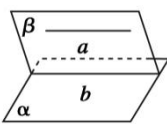
第四部分 立体几何
第十五章 直线与平面

考点 1.空间点、直线、平面之间的位置关系

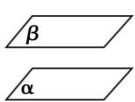
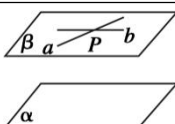
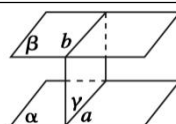
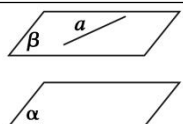
		直线与直线	直线与平面	平面与平面
平行关系	图形语言			
	符号语言	$a \parallel b$	$a \parallel \alpha$	$\alpha \parallel \beta$
相交关系	图形语言			
	符号语言	$a \cap b = A$	$a \cap \alpha = A$	$\alpha \cap \beta = l$

独有 关系	图形 语言			
	符号 语言	a, b 是异面直线	$a \subset \alpha$	

考点 2.直线与平面平行的判定与性质

	判定		性质	
	定义	定理		
图形				
条件	$a \cap \alpha = \varnothing$	$a \subset \alpha, b \not\subset \alpha, a \parallel b$	$a \parallel \alpha$	$a \parallel \alpha, a \subset \beta, \alpha \cap \beta = b$
结论	$a \parallel \alpha$	$b \parallel \alpha$	$a \cap \alpha = \varnothing$	$a \parallel b$

考点 3.面面平行的判定与性质

	判定		性质	
	定义	定理		
图形				
条件	$\alpha \cap \beta = \varnothing$	$a \subset \beta, b \subset \beta, a \cap b = P, a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$	$\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b$	$\alpha \parallel \beta, a \subset \beta$
结论	$\alpha \parallel \beta$	$\alpha \parallel \beta$	$a \parallel b$	$a \parallel \alpha$

重要结论：

- 1.垂直于同一条直线的两个平面平行，即“若 $a \perp \alpha, a \perp \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ ”。
- 2.垂直于同一个平面的两条直线平行，即“若 $a \perp \alpha, b \perp \alpha$ ，则 $a \parallel b$ ”。
- 3.平行于同一个平面的两个平面平行，即“若 $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma$ ”

考点 4.直线与平面垂直

- (1) 直线与平面垂直
 - ①定义：若直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，则直线 l 与平面 α 垂直。
 - ②判定定理：一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直（线线垂直 $\Rightarrow$ 线面垂直）。即：
 $a \subset \alpha, b \subset \alpha, l \perp a, l \perp b, a \cap b = P \Rightarrow l \perp \alpha$ 。
 - ③性质定理：垂直于同一个平面的两条直线平行。即： $a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$ 。
- (2) 直线与平面所成的角
 - ①定义：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条斜线 and 这个平面所成的角。
 - 若直线与平面平行或直线在平面内，直线与平面所成角为 0 ，若直线与平面垂直，直线与平面所成角为 $\frac{\pi}{2}$ 。
 - ②线面角 θ 的范围： $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 。

考点 5. 平面与平面垂直

(1) 二面角的有关概念

①二面角：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角。

②二面角的平面角：以二面角的棱上任意一点为端点，在两个半平面内分别作与棱垂直的射线，则两射线所成的角叫做二面角的平面角。

③二面角 θ 的范围： $\theta \in [0, \pi]$ 。

(2) 平面与平面垂直

①定义：两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直。

②判定定理：一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直。即： $a \subset \alpha, a \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$ 。

③性质定理：两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直。即： $\alpha \perp \beta, a \subset \alpha, \alpha \cap \beta = b, a \perp b \Rightarrow a \perp \beta$ 。

重要结论

1. 若两条平行线中的一条垂直于一个平面，则另一条也垂直于这个平面。

2. 若一条直线垂直于一个平面，则它垂直于这个平面内的任何一条直线（证明线线垂直的一个重要方法）。

3. 垂直于同一条直线的两个平面平行。

4. 一条直线垂直于两平行平面中的一个，则这条直线与另一个平面也垂直。

第十六章 空间向量**考点 1 向量的基本概念**

1. **向量**：既有大小又有方向的量称为向量，记作： $\vec{a}$

2. **向量的模**：向量的大小叫向量的模，记作： $|\vec{a}|$

(1) 模等于 1 的向量叫单位向量，记作： $\vec{e}$ ，即 $|\vec{e}|=1$

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} (\vec{a} \neq \vec{0})$ 是与 $\vec{a}$ 相同方向的单位向量，记作： $\vec{e}_a$ （思考：相反，平行情况如何？）

(2) 模等于 0 的向量叫零向量，记作： $\vec{0}$ ，即 $|\vec{0}|=0$

（注： $\vec{0}$ 的方向是任意的）

3. $\lambda \vec{a}$ （ λ 为常数）

(1) $\lambda > 0$ ，表示 $\lambda \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同；

(2) $\lambda < 0$ ，表示 $\lambda \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反；

(3) $\lambda = 0$ ，表示 $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ 。

考点 2. 空间向量的表示方法

(1) 两点表示式

设 $A(x_1, y_1, z_1)$ ， $B(x_2, y_2, z_2)$ 则：向量 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ，且

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(2) 坐标表示式： $\vec{a} = (x, y, z)$

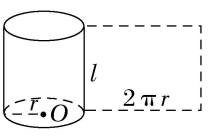
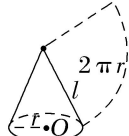
(3) 坐标分解式

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ，其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别为 x 轴， y 轴， z 轴方向上的单位向量。

第十七章 多面体与旋转体**考点 1. 多面体的表（侧）面积**

多面体的各个面都是平面，则多面体的侧面积就是所有侧面的面积之和，表面积是侧面积与底面面积之和。

考点 2.圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及侧面积公式

	圆柱	圆锥	圆台
侧面展开图			
侧面积公式	$S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi rl$	$S_{\text{圆锥侧}} = \pi r'l$	$S_{\text{圆台侧}} = \frac{\pi (r_1 + r_2) l}{1}$

考点 3.空间几何体的表面积与体积公式

名称 几何体	表面积	体积
柱体（棱柱和圆柱）	$S_{\text{表面积}} = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}}$	$V = S_{\text{底}} h$
锥体（棱锥和圆锥）	$S_{\text{表面积}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}}$	$V = \frac{1}{3} S_{\text{底}} h$
台体（棱台和圆台）	$S_{\text{表面积}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{上}} + S_{\text{下}}$	$V = \frac{1}{3} (S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}} S_{\text{下}}}) h$
球	$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

常用结论

- 1.正方体与球的切、接常用结论正方体的棱长为 a ，球的半径为 R
- (1) 若球为正方体的外接球，则 $2R = \sqrt{3}a$;
- (2) 若球为正方体的内切球，则 $2R = a$;
- (3) 若球与正方体的各棱相切，则 $2R = \sqrt{2}a$.
- 2.长方体的共顶点的三条棱长分别为 a, b, c ，外接球的半径为 R ，则 $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- 3.正四面体的外接球的半径 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ，内切球的半径 $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ ，其半径 $R : r = 3 : 1$ (a 为该正四面体的棱长)。

第五部分 概率与统计初步

第十八章 排列组合与二项式定理

考点 1. 分类加法计数原理

完成一件事有 n 类不同的方案，在第一类方案中有 m_1 种不同的方法，在第二类方案中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类方案中有 m_n 种不同的方法，则完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 种不同的方法。

考点 2 分步乘法计数原理

完成一件事需要分成 n 个不同的步骤，完成第一步有 m_1 种不同的方法，完成第二步有 m_2 种不同的方法，……，完成第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ 种不同的方法。

重要结论

分类加法计数原理和分步乘法计数原理的区别

分类加法计数原理针对“分类”问题,其中各种方法相互独立,用其中任何一种方法都可以做完这件事;分步乘法计数原理针对“分步”问题,各个步骤相互联系、相互依存,只有各个步骤都完成了才算完成这件事.

考点 3.排列与排列数

(1) 排列的定义:从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

(2) 排列数的定义:从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有不同排列的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 A_n^m 表示.

(3) 排列数公式: $A_n^m = \underline{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}$.

(4) 全排列: n 个不同元素全部取出的一个排列,叫做 n 个元素的一个全排列, $A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = \underline{n!}$.排列数公式写成阶乘的形式为 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, 这里规定 $0! = \underline{1}$.

考点 4.组合与组合数

(1) 组合的定义:一般地,从 n 个不同元素中取出 m ($m < n$) 个元素合成一组,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

(2) 组合数的定义:从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有不同组合的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用符号 C_n^m 表示.

(3) 组合数的计算公式: $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}$, 这里规定 $C_n^0 = \underline{1}$.

(4) 组合数的性质: ① $C_n^m = \underline{C_n^{n-m}}$; ② $C_{n+1}^m = \underline{C_n^m} + \underline{C_n^{m-1}}$.

重要结论

对于有附加条件的排列、组合应用题,通常从三个途径考虑

(1) 以元素为主考虑,即先满足特殊元素的要求,再考虑其他元素.

(2) 以位置为主考虑,即先满足特殊位置的要求,再考虑其他位置.

(3) 先不考虑附加条件,计算出排列数或组合数,再减去不合要求的排列数或组合数.

考点 5.二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n \quad (n \in \mathbb{N}_+).$$

这个公式叫做二项式定理,右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式,其中的系数 C_n^k ($k=0,1,2,\dots,n$) 叫做二项式系数,式中的 $C_n^k a^{n-k} b^k$ 叫做二项展开式的通项,用 T_{k+1} 表示,即通项为展开式的第 $k+1$ 项: $T_{k+1} = \underline{C_n^k a^{n-k} b^k}$.

第十九章 概率与统计初步

考点 1.互斥事件与对立事件

事件的关系与运算

	定义	符号表示
并事件 (和事件)	若某事件发生 <u>当且仅当事件 A 发生或事件 B 发生</u> ,则称此事件为事件 A 与事件 B 的并事件(或和事件)	$\underline{A \cup B}$ $\underline{(或 A+B)}$
交事件 (积事件)	若某事件发生 <u>当且仅当事件 A 发生且事件 B 发生</u> ,则称此事件为事件 A 与事件 B 的交事件(或积事件)	$\underline{A \cap B}$ $\underline{(或 AB)}$
互斥	若 $A \cap B$ 为 <u>不可能</u> 事件,则称事件 A 与事件 B 互斥	$\underline{A \cap B = \emptyset}$

事件		
对立事件	若 $A \cap B$ 为 <u>不可能</u> 事件, $A \cup B$ 为 <u>必然事件</u> , 则称事件 A 与事件 B 互为对立事件	<u>$A \cap B = \emptyset$</u> , <u>$A \cup B = \Omega$</u>

概率的几个基本性质

- (1) 概率的取值范围: $0 \leq P(A) \leq 1$.
- (2) 必然事件的概率: $P(A) = 1$.
- (3) 不可能事件的概率: $P(A) = 0$.
- (4) 概率的加法公式: 若事件 A 与事件 B 互斥, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- (5) 对立事件的概率: 若事件 A 与事件 B 互为对立事件, 则 $A \cup B$ 为必然事件. $P(A \cup B) = 1$, $P(A) = 1 - P(B)$.

考点 2.事件的相互独立性

设 A、B 为两个事件, 如果 $P(AB) = P(A) P(B)$, 则称事件 A 与事件 B 相互独立.

若事件 A、B 相互独立, 则 $P(B|A) = P(B)$; 事件 A 与 B, A 与 B, A 与 B 都相互独立.

考点 3.统计初步样本均值和方差

设样本数据为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则样本平均数 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, 样本方差: $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$